EL CONCEPTO DE "GENERICIDAD" EN ECONOMÍA POLÍTICA

Ramón García-Cobián J.

RESUMEN

El autor presenta el concepto de 'genericidad' y sostiene que es indispensable en los modelos científicos. Asimismo, define el concepto asociado de 'excepcionalidad' y demuestra que algunas asunciones económico-políticas (como la marxiana uniformidad de la composición orgánica del capital o la independencia industrial de Morishima) lo son. Finalmente, demuestra que los buenos sistemas sraffianos son genéricos.

ABSTRACT

The author explains the concept of 'genericity' and maintains that it is essential for scientific models. Then, he defines the associated concept of 'exceptionality' and shows how some assumptions in political economics (like Marx's theory of the uniformity of the composition of capital or Morishima's industrial independence) are exceptional. Finally, he shows that successful Sraffian systems are generic.

1. Introducción

Hacer un modelo científico es producir algún tipo de réplica de cierto sector de fenómenos de la realidad, entre todos los cuales se han establecido ciertas relaciones de manera intuitiva con el fin de conseguir explicaciones posibles de dichos fenómenos, así como algún poder de predicción -y por ende de control- en relación a ellos. Naturalmente, el éxito de tal empresa dependerá en gran medida de la buena capacidad de reproducción y predicción de los fenómenos observables que posea el modelo.

Ahora bien, es una característica frecuente del esfuerzo científico el que los fenómenos seleccionados para el estudio sean en algún sentido 'estables' respecto a las circunstancias de sus ocurrencias, es decir, que al producirse variaciones arbitrarias pero bastante pequeñas en éstas, sólo se den cambios cuantitativos pequeños en la ocurrencia del fenómeno, mas no cambios cualitativos[1]. Por esta razón el modelo tiene que ser capaz de reflejar tal tipo de estabilidad en el sentido de que sus resultados han de depender continuamente de todo aquello que representa las circunstancias, es decir, los parámetros del modelo.

Así, pues, para cada juego de circunstancias reales, tiene que corresponder un juego de parámetros en el modelo. De esta manera se forma el espacio paramétrico, cada uno de cuyos puntos corresponde a una, y sólo una, de las diversas posibles ocurrencias del fenómeno en estudio. En consecuencia, cualquier propiedad que se asuma en el modelo debería ser satisfecha por todo punto del espacio paramétrico, o, por lo menos, por una 'gran mayoría', pues de lo contrario se estaría renunciando desde el inicio al poder explicativo y predictivo sobre una cantidad importante de posibles ocurrencias del fenómeno, cosa claramente inaceptable en cualquier disciplina científica.

Lo primero que hay que hacer, entonces, es precisar el concepto vago de 'gran mayoría', mediante el concepto técnico de 'genericidad'. Luego se ha de proceder al examen de algunas propiedades asumidas en relación a algunos modelos bien conocidos en teoría económica, con el fin de determinar si se justifican desde este punto de vista el que sean asumidas.

2. El Concepto de "Genericidad"

La mínima estructura matemática que se impone en los espacios paramétricos de los modelos científicos suele ser la de un espacio topológico. Esto es así porque de otro modo no se podría hablar de ningún tipo de dependencia continua, ya que para esto son imprescindibles los conceptos de 'vecindad', de conjuntos 'abiertos' y de conjuntos 'densos', todos los cuales constituyen la 'materia prima' de los espacios topológicos.

Sin embargo, ocurre, en muchos modelos de las ciencias que se va mucho más lejos al imponer estructuras métricas en los espacios paramétricos, pues toda métrica determina una única topología.

Como éste será el caso en los modelos concretos que se consideran en el presente trabajo, bastará que quien carezca de conocimientos topológicos conciba siempre los espacios paramétricos como alguno de los familiares espacios euclídeos, R^n, de los cursos de análisis matemático, en los cuales, como bien se sabe, todas las métricas generadas por normas determinan la misma estructura topológica (Ver Apostol, 1986, p.81, 3.28). Esto quiere decir que al interpretar la distancia entre dos puntos $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_n)$ de R^n, no importa si ella se toma como la euclídea, $(\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2)^{1/2}$, o como la del máximo, $\max\{|x_i - y_i| \mid i\ N_n\}$ [2].

Definición

Se dice que una propiedad es 'genérica' cuando el conjunto de los puntos que la satisfacen es abierto y denso[3], o por lo menos cuando resulta de la intersección de una familia innumerable[4] de abiertos-densos.

Los siguientes ejemplos aclararán este concepto.

Ejemplos

1) En R^n son genéricas las siguientes propiedades: 'tener abscisa diferente de cero' y 'no distar del origen una distancia entera'. Sus respectivas gráficas son:

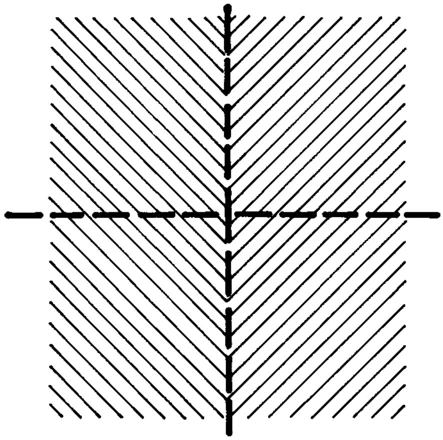

Figura 1

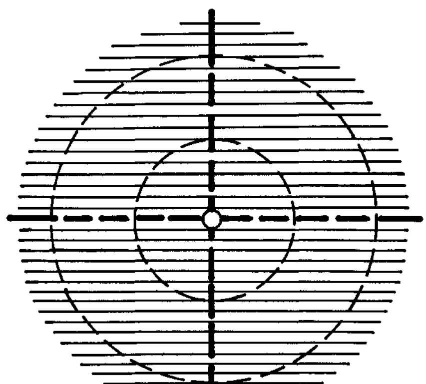

Figura 2

En el primer caso, si se define $\forall\, i \,\varepsilon\, N$, $A := R^2 \setminus \{x \,\varepsilon\, R^2 \mid x_1 = 0\}$, entonces A es abierto y denso. En el segundo caso, en cambio, puede representarse el conjunto de puntos que satisfacen a la propiedad como $\cap\, \{A_i \mid i \,\varepsilon\, N\}$, donde cada A_i es abierto-denso si se lo define como $A := R^2 \setminus \{x \,\varepsilon\, R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = i^2\}$, para cada $i \,\varepsilon\, N \cup \{0\}$.

2) En R es genérica la propiedad 'ser irracional', pues el conjunto de números reales que la satisfacen, es decir, los irracionales, se obtienen como la intersección: $\cap\, \{A_{ab} \mid (a,b) \varepsilon\ Z \times (Z \setminus \{0\})\}$, donde $A_{ab} := R \setminus \{\frac{a}{b}\}$.

Obviamente, cada A_{ab} es abierto y denso en R, y como los racionales forman un conjunto innumerable, la familia de los A_{ab} también es innumerable.

La idea tras la definición de 'genericidad' es la de una inmensa mayoría, como ilustran los ejemplos anteriores; sin embargo ha de notarse que las dos propiedades del primer ejemplo son algo más que genéricas, pues originan subconjuntos abiertos de R^2, mientras que la del segundo ejemplo no da un subconjunto abierto de R, sino sólo uno denso, como el de los racionales, pero mucho más abundante que éste, pues es innumerable.

La diferencia entre un conjunto meramente 'genérico' y otro abierto-denso es que éste, además de genérico, y, por lo tanto, de ser una 'inmensa mayoría', es en cierto sentido homogéneo, puesto que cualquiera de sus elementos está rodeado en alguna vecindad, posiblemente 'pequeña', enteramente por 'semejantes', es decir, puntos del mismo conjunto.

Así, pues, toda asunción hecha en un modelo particular, para ser científicamente aceptable, deberá ser genérica en el espacio paramétrico del modelo; de otro modo podría decirse que sería 'excepcional', y, por ende, carente de interés científico.

3. Diversos Grados de Excepcionalidad

Por una extensión natural del concepto de genericidad, puede decirse que una propiedad es 'excepcional' si su negación es genérica. En los dos ejemplos anteriores son excepcionales, entonces, las propiedades 'no tener abscisa diferente de cero' y 'distar del origen una distancia entera', en R^2, y la propiedad 'no ser racional', en R.

Ahora bien, podría decirse que ciertas propiedades son más excepcionales que otras, como por ejemplo la propiedad en R^2: 'tener abscisa nula y ordenada entera', cuya gráfica es la siguiente:

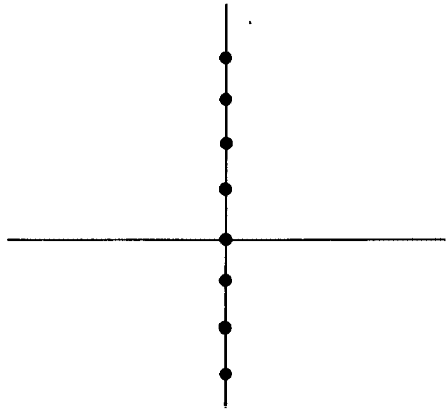

Figura 3

Siendo satisfecha sólo por los puntos de un conjunto innumerable, podría decirse que su grado de excepcionalidad es mayor que el de 'tener abscisa nula', satisfecha por un conjunto innumerable de puntos de R^2. Similarmente, podría pensarse que de las propiedades en R^3: 'tener nulas las dos últimas coordenadas' y 'tener nula la última coordenada', la primera sería más excepcional que la segunda, puesto que los conjuntos de puntos que las satisfacen tienen, respectivamente, dimensiones 1 y 2.

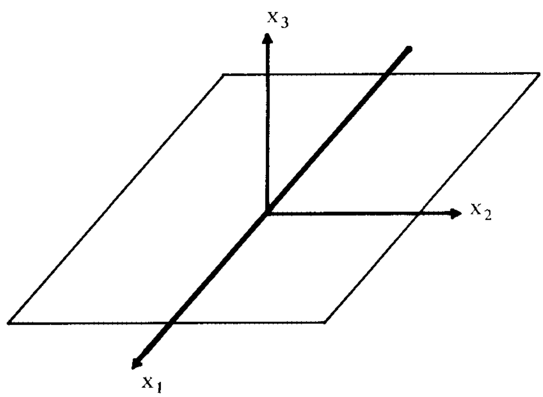

Figura 4

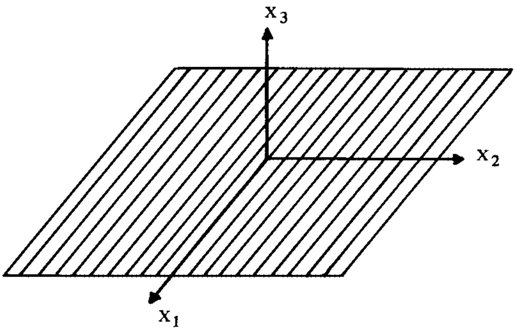

Figura 5

En estos ejemplos fue posible hablar de mayor excepcionalidad porque pudo hablarse de dimensiones para los conjuntos que satisfacen a las propiedades en cuestión. Pero, en muchos otros casos esto no es tan fácil; por ejemplo, de las dos siguientes propiedades en R^3 : '$x_3 2 = x_2$' y '$x_1 = 0$ ^ $x_3 = x_2 2$', intuitivamente es claro que la segunda sería la más excepcional, como lo ilustran sus respectivas gráficas.

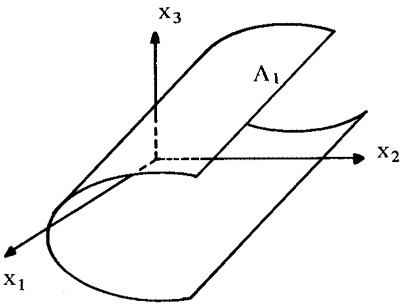

Figura 6

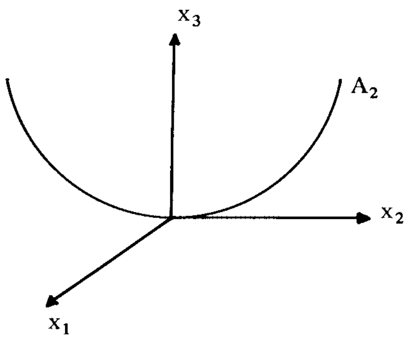

Figura 7

Para tales relaciones puede usarse una rama relativamente joven de las matemáticas, a saber, la topología diferencial, según la cual A_1 y A_2 son casos particulares de lo que se conoce como 'subvariedades diferenciables' de R^3, siendo la primera de dimensión 2, y la segunda de dimensión 1. Todo esto no hace sino generalizar lo relativo a la geometría diferencial en R^3, donde se dice que las curvas tienen dimensión 1, mientras que las superficies tienen dimensión 2. En forma natural se extiende todo esto a cualquier R^m en donde aparecen subvariedades diferenciables de dimensión k, pudiendo k ser cualquier entero desde 0 hasta m.

En forma aproximada solamente, y no muy técnicamente, puede decirse que una subvariedad diferenciable k-dimensional de R^n es cualquier subconjunto M, de este espacio, tal que para cada uno de sus puntos, p, haya una bola abierta de R^m, centrada en p, tal que la intersección de dicha bola con M sea la imagen de una bola abierta de R^k mediante una aplicación de clase C cuya inversa también sea de clase C [5]. Tal aplicación se conoce como 'una parametrización en torno a p', y su inversa como un 'sistema de coordenadas locales en torno a p'. Si la dimensión de una subvariedad diferenciable de R^m es k, se dirá que su 'codimensión' es m-k. Este concepto de codimensión da idea de 'cuántas dimensiones' deja sin ocupar la subvariedad. Así, en el último ejemplo, la codimensión en A_1, es 1 y la de A_2 es 2; por lo tanto, A_2 'ocupa menos dimensiones' que A_1.

Las subvariedades diferenciables de R^m son útiles en el contexto del presente trabajo porque se sabe que si la codimensión de una de ellas es al menos igual a 1, su complemento es abierto y denso, y, por lo tanto, el pertenecer a la subvariedad resulta ser una propiedad excepcional en R. Así, se dirá que el 'grado de excepcionalidad' de una propiedad cualquiera es la codimensión de la subvariedad formada por los puntos que satisfacen a dicha propiedad. Ya que reconocer subvariedades diferenciables de R^m cuando m 3 no es fácil, puesto que no es posible hacer figuras en dimensión mayor que 3, resulta de gran utilidad el siguiente teorema.

Teorema 3.1 (Spivak, 1965, p.111)

Sea A un conjunto abierto de R^m y sea $g : A \rightarrow R^m$ una aplicación diferenciable tal que $\forall p$ A, ($g(p) = 0 \rightarrow$ rango de $Dg(p) = n$).

Entonces $g^{-1}(0)$ es una subvariedad diferenciable de R^m de codimensión igual a n.

En términos simples, lo que dice este teorema es que si se tienen n ecuaciones independientes en m incógnitas (con $n \leq m$), y si dichas ecuaciones están dadas por funciones diferenciables $g_1, ... g_n$; entonces el conjunto de las soluciones forma una subvariedad diferenciable de R^m de dimensión igual a m-n, es decir, de codimensión igual a n.

Ejemplos

Si A_1 y A_2 denotan a los subconjuntos de R^3 del ejemplo anterior, entonces con ayuda de este teorema puede demostrarse lo dicho, a saber, que son respectivamente subvariedades diferenciables de R^3 de codimensiones 1 y 2. En efecto, para A_1, definiendo la función g: R^3 R, por $g(x_1, x_2, x_3) := x_2 - x_3 2$, que es diferenciable por ser polinomial, resulta que, puesto que $\forall$ x ε R^3, $Dg(x) = (0,1,-2x_3)$ es un vector no nulo y, por ello, el rango de $Dg(x)$ es igual a 1; resulta, por el teorema, que A_1 es una subvariedad diferenciable de R^3 de codimensión igual a 1. En cambio, para A_2, si se definen las funciones $g_1(x_1, x_2, x_3) := x_1$ y $g_2(x_1, x_2, x_3) := x_2 2 - x_3$, se sigue de la diferenciabilidad de ambas y de su independencia-deducida de que $\forall$ x ε R^3 tal que $g_1(x) = 0 = g_2(x)$ se tiene que $D(g_1, g_2)(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2_{x_2} & -1 \end{bmatrix}$ cuyo rango es 2 -, que $A_2 = \{x \, \varepsilon R^3 \mid g_1(x) = 0 = g_2(x)\}$ es una subvariedad diferenciable de R^3 de codimensión 2.

Finalmente, se dirá que el 'grado de excepcionalidad' de una subvariedad diferenciable de R^m está dado por su codimensión.

4. La Uniformidad de las Composiciones Orgánicas del Capital

Se considera una economía marxiana de m sectores productivos, o industrias, de los cuales n producen bienes de capital, mientras que los m-n restantes se dedican a la producción de bienes de subsistencia[6]. Ella se representa por el quíntuple, (A_I, A_{ii}, L_I, L_{II}, B), perteneciente al espacio

$$M(n,n) \times M(n,m\text{-}n) \times M(1,n) \times M(1,m\text{-}n) \times M(m\text{-}n,1).$$

En esto, $M(h,k)$ denota el espacio vectorial de las matrices de dimensión h x k. Como es bien sabido, puede dársele una topología identificándolo con R^{hk}.

Así, pues, 'una economía marxiana' de m sectores en total y de n sectores productivos (en adelante y para abreviar, se la denotará como E (m,n)), es representada como un quíntuple (A_I, A_{II}, L_I, L_{II}, B) de $R_+^{nn} \times R_+^{n(m-n)} \times R_+^{n} \times R_+^{m-n} \times R_+^{m-n}$; tal que A_I es productiva e indescomponible[7], y que $B \geq 0$ es tal que $A_{II}.B < 1$. Así, el 'espacio de las economías marxianas', E_{mx}, resulta representado por un abierto de $R_+^{mn} \times R_+^{m} \times R_+^{m-n}$, a saber, el $E_{mx} := R_+^{mn+2m-n} \cap U$, donde $U := \{(A,L,B) \, \varepsilon \, R^{mn} \times R^m \times R^{m-n} \mid (L_I (I_n - A_I)^{-1} A_{II} + L_{II}) B < 1\}$, es claramente un abierto de $R^{mn+2m-n}$.

De lo que se trata, en lo siguiente, es de averiguar si, en el espacio de todas las economías marxianas, es genérica o no la propiedad de ser iguales entre sí las composiciones orgánicas del capital en los m sectores.

Para el i-ésimo sector industrial, el valor laboral del capital constante por unidad de producto es $C_i := \Lambda_I A_{.i}$ [8]; el valor laboral del capital variable por unidad de producto es $V_{ip} := (\Lambda_{II}.B) l_i$; el valor monetario del capital constante, $C_{ip} := p_I A_{.i}$, y el valor monetario del capital variable $V_{ip} := (p_{II}.B) l_i$, donde $p := [p_I \mid p_{II}]$ es el vector de precios de producción o valores monetarios de las mercancías.

Con esta notación, la plusvalía y ganancias sectoriales por unidad de producto se expresan por:

$$S_i := \lambda_i - (C_i + V_i) \text{ y } \Pi_i := p_i - (C_p^i + V_p^i).$$

La hipótesis de Marx acerca de la uniformidad de las composiciones orgánicas del capital consiste en que

$$\frac{C_1}{V_1} = ... = \frac{C_m}{V_m} \quad \text{(HUCO)}$$

Lema 4.1

La hipótesis de la uniformidad de las composiciones orgánicas del capital es lógicamente equivalente a que las ganancias sectoriales por unidad de producto sean proporcionales a las plusvalías sectoriales por unidad de producto (HPGP). (Una demostración incompleta de esto se da en Morishima, 1973).

Lema 4.2

La hipótesis de uniformidad de las composiciones orgánicas del capital equivale lógicamente a que $\pi(C + V) = S$, siendo π la tasa de ganancia.

Teorema 4.3

La hipótesis de uniformidad de las composiciones orgánicas del capital no es genérica en el espacio de las economías marxianas, y su orden de excepcionalidad es m.

5. El Intento de Morishima No Reduce la Excepcionalidad de la Hipótesis

Habiendo observado el carácter excesivamente restrictivo de la hipótesis de uniformidad en las composiciones orgánicas del capital, Morishima pretende mejorarla haciéndola menos restrictiva y, por lo tanto, más aceptable. Para ello, la transforma en lo que él llama hipótesis de 'dependencia lineal industrial', según la cual (Morishima 1973, p.75):

$$(\pi(C + V) - S)\, M = 0 \qquad \text{(HDLI)}$$

Como ya se ha visto en el punto 4 de este trabajo, la expresión $\pi(C+V) - S$ es lógicamente equivalente a $\pi\, \Lambda M + \Lambda N - L$, siendo $\Lambda = [L_I(I_n-A_I)^{-1} \mid L_I(I_n-A_I)^{-1} A_{II} + L_{II}]$, y

N, la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BL_I & BL_{II} \end{bmatrix}$

Además, para Morishima, π debe ser la tasa de ganancia correspondiente a la senda dorada de crecimiento balanceado, y medida a la manera de Marx, es decir, en términos de plusvalías y valores laborales:

$$\Pi = \left(\sum_1^m S_j\, y_j\right) / \left(\sum_1^m (C_j + V_j)\, y_j\right) \qquad (11)$$

donde $y_1,\ldots,y_m$ son las producciones relativas de dicho crecimiento balanceado, que son dadas, junto con π, por la condición:

$$y = (1 + \pi)My \qquad (12)$$

Que las expresiones (11) y (12) son equivalentes se ve como sigue. Ya se ha visto que $\sum_1^m (C_j + V_j)\, y_j = \sum_1^m (\Lambda M_{.j})\, y_j = \Lambda My$; que $\sum_1^m S_j\, y_j = \sum_1^m (\lambda_j - (C_j + V_j))\, y_j = \Lambda y - \Lambda My$.

De todo esto se sigue que el miembro del lado derecho de (11) es $(\Lambda - \Lambda M)\, y / (\Lambda My)$; pero si ambos miembros de (12) se premultiplican por el vector fila Λ y se despeja π, se obtiene que $\pi = (\Lambda y - \Lambda My) / (\Lambda My)$, que es, pues, el valor dado por (11) para π.

Ahora bien, (12) muestra que el valor de π y el vector de producciones relativas son dados simultáneamente a partir de la matriz M, es decir, de (A, L, B); pues sólo consiste en que, dada M, hay que buscar π y y tales que (12). Así, y ha de ser el vector propio asociado a la raíz de Perron-Frobenius de M (por las propiedades asumidas de A_I se demuestra en Morishima 1973, que M tiene un subespacio propio monodimensional asociado a dicha raíz); es decir, $\rho\, y = My$, de donde π es el inverso multiplicativo de esa raíz menos uno, que es el valor ya encontrado en la demostración del teorema 4.3. De este modo se ve que la tasa de ganancia considerada por Morishima en su hipótesis (HDLI) no es otra que la verdadera tasa de ganancia considerada por Marx.

Comparando las hipótesis (HUCO) y (HDLI), respectivamente, puede fácilmente notarse que de la primera se sigue la segunda, mas no lo recíproco. Así, no hay más que constatar que la hipótesis de Morishima es menos restrictiva que la uniformidad de las composiciones orgánicas del capital. Es decir, el conjunto de las economías marxianas que satisfacen a la primera, se encuentra contenido en el de las que satisfacen a la segunda. Sin embargo, esta inclusión propia no mejora la situación desde el punto de vista de la excepcionalidad, pues, como se muestra en el siguiente teorema, tan poco genérica, es decir, tan excepcional, es la una como la otra. Se trata de algo semejante a lo que mostramos en la siguiente figura.

$\overline{R}_+mn \times \overline{R}_+m \times \overline{R}_+{}^{m-n}$

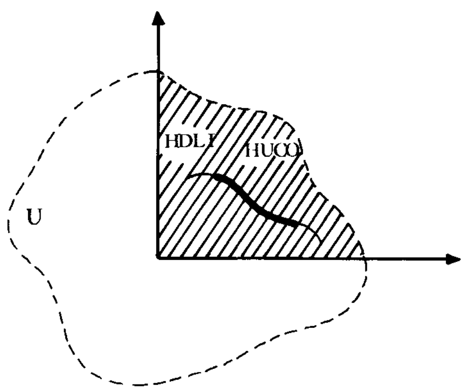

Figura 8

Teorema 5.1

La hipótesis de dependencia lineal industrial no es genérica en el espacio de las economías marxianas, y su orden de excepcionalidad es el mismo que el de la hipótesis de uniformidad de las composiciones orgánicas del capital.

6. Los "Buenos" Sistemas Sraffianos son Buenos, es decir, Genéricos

Un sistema sraffiano de producción disjunta puede bien ser caracterizado por un triple (A, L, b) ε M_+ (n,n) x R_+^nx R_+^n, donde A es la matriz de insumos requeridos por los n sectores industriales para lograr una producción bruta representada por el vector b, utilizando, respectivamente, partes de la fuerza laboral disponible total dadas por el vector L. Así, las condiciones que caracterizan el funcionamiento de tal sistema son[9]:

$b \geq A\,\sigma$, $(1+r)\,pA + wL = pB$, $L\,\sigma = 1$ y $p(B-A)\,\sigma = 1$ (13)

donde σ ε R^n es un vector columna, todos cuyos componentes valen 1; B es la matriz diagonal, cuya diagonal se forma con los coeficientes del vector b; y, por último, r, w y p representan, respectivamente, a la tasa de ganancia, el salario y el vector de precios, los cuales son las variables endógenas del sistema (A, L, b).

Las condiciones primera y tercera de (13) son restricciones que expresan respectivamente que, por lo menos en un sector, ha de haber producción neta mayor que cero, y que la fuerza laboral total disponible, 1, ha de repartirse entre los n sectores industriales. Las otras dos condiciones han de ser satisfechas, más bien, por las variables endógenas del sistema.

Así, pues, el conjunto de los sistemas sraffianos puede caracterizarse por:

$E_{sr} := \{(A,L,b)\ \varepsilon\ R_+nn \times R_+n \times R_+n \mid b \geq A\sigma \wedge L\sigma = 1\}$ (14)

Ahora bien, la condición $b \geq A\sigma$ establece que b debe encontrarse en el ortante innegativo de R^n, pero no en cualquier parte de éste, sino por encima y a la derecha del punto $A\sigma$, como se ve en la figura.

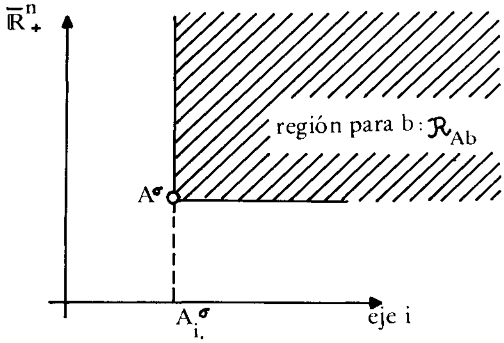

Figura 9

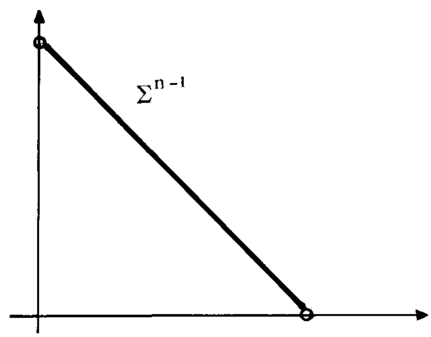

Figura 10

Por otra parte, la condición $L\sigma = 1$ establece que el vector L ha de estar en el ortante positivo de R^n, pero también en lo que se conoce como el simplejo (n-1)-dimensional, $\Sigma^{n-1} := \{x \varepsilon R_+n \mid x\sigma = 1\}$, que se indica en la figura 10.

Por consiguiente, el conjunto de las economías sraffianas puede ahora expresarse por $E_{sr} = \{(A, L, b) \varepsilon R_+nn \times \Sigma^{n-1} \times R_+n \mid b \geq A\sigma \wedge L > 0\}$, que es un subconjunto de $R^{nn} \times R^{2n}$, cuyo aspecto puede imaginarse con ayuda de la siguiente figura.

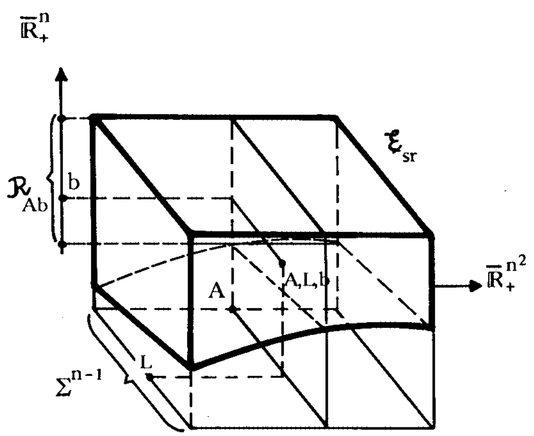

Figura 11

Aparte de consideraciones sobre la geometría de E_{sr}, lo que realmente interesa en el presente trabajo es estudiar aquel subconjunto de E_{sr} construido por los sistemas que, según Cobián (1983), se pueden denominar 'buenos', es decir, aquéllos para los cuales existe la mercancía patrón y es única. Según el teorema 5.1 de la referencia antedicha, son 'buenos' aquellos sistemas (A, L, b) para los cuales la matriz A es indescomponible. Pero en el Lema 1 del apéndice de este trabajo se demuestra que el conjunto de las matrices indescomponibles de dimensión nxn es abierto y denso en R_+nn.

De esto se sigue que el conjunto de los 'buenos' sistemas sraffianos es $B_{sr} := \{(A,L,b) \varepsilon E_{sr} \mid \exists!$ merc. patrón para (A,L,b) y A es indescomponible$\}$.

Así, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.1

El conjunto de los 'buenos' sistemas sraffianos; es decir, aquellos indescomponibles que poseen una única mercancía patrón, es genérico en el conjunto de todos los sistemas sraffianos.

Finalmente, y para dar una ilustración más del concepto de genericidad, debe hacerse notar que el teorema 3.3 de Cobián (1983) pierde sustancialmente importancia a la luz de la noción de genericidad. Dicho teorema establece que, el que los valores mercantiles sean proporcionales a los costos laborales sólo cuando el salario valga 1, se sigue de que L no sea un vector propio de la matriz $(B-A)^{-1}$ A asociado a la raíz de Perron-Frobenius de ésta.

Ahora bien, la primera tesis del teorema Perron-Frobenius (Ver apéndice) establece que el subespacio propio de la matriz, asociado a la raíz de Perron-Frobenius, es monodimensional. Por consiguiente, en el simplejo Σ^{n-1} no habrá sino un punto de dicho subespacio. De esto se sigue que el conjunto de los $L \varepsilon \Sigma^{n-1}$ tales que L no sea vector propio de $(B-A)^{-1}$ A, asociado a la raíz de Perron-Frobenius de ésta, es abierto y denso -y por tanto genérico en Σ^{n-1}. Así, se ha probado el siguiente teorema.

Teorema 6.2

En el conjunto de los sistemas sraffianos, se tiene genéricamente, que los valores mercantiles son proporcionales a sus costos laborales sólo si w = 1.

Conclusiones

La noción de genericidad es indispensable para determinar la adecuación científica de un modelo teórico a la realidad en estudio y para establecer la real importancia de sus conclusiones.

La hipótesis de uniformidad de las composiciones orgánicas del capital no es genérica en el conjunto de las economías marxianas.

La hipótesis de dependencia lineal industrial, con la que Morishima pretende mejorar la hipótesis anterior, tampoco es genérica en el conjunto de las economías marxianas, y es tan excepcional como aquélla.

Genéricamente, cualquier sistema sraffiano posee mercancía patrón y de modo único.

Genéricamente, en cualquier sistema sraffiano, los valores mercantiles son proporcionales a sus costos laborales sólo si todo el excedente va a los trabajadores.

Apéndice

Definición

Se dice que una matriz innegativa A, cuadrada n x n, es 'indescomponible' si no hay ningún subconjunto propio, J, de N_n que no sea vacío y tal que $\forall j \varepsilon J \forall i \varepsilon N_n \setminus J, a_{ij} = 0$.

Teorema (de Perron-Frobenius)

Si A es una matriz cuadrada n x n, con $n \geq 2$, innegativa e indescomponible, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones: (i) A tiene un valor propio positivo, λ (A), llamado 'raíz de Perron-Frobenius de A' tal que la ecuación característica de A tiene en λ (A) una raíz simple, es decir, de multiplicidad 1; en consecuencia, hay un vector propio $x > 0$ a ella asociado, y cualquier otro que sea tal es múltiplo de x; (ii) el espectro de A, es decir, el conjunto de sus valores propios, se encuentra contenido en el círculo de centro en el 0 del plano complejo, y de radio igual a λ (A), siendo λ (A) el único valor propio innegativo; (iii) para todo r de R, si la matriz identidad n x n se denota por I_n, entonces existe y es positiva la $(rI_n - A)^{-1}$, si y sólo si $r > \lambda$ (A). (Ver, Nikaido, 1978. pp.125 y 143).

Lema 1

El conjunto J^*_+ (n,n) de todas las matrices innegativas e indescomponibles n x n es un subconjunto abierto y denso del espacio de todas las matrices innegativas n x n.

Demostración

Es Abierto

Primero hay que notar que la definición de indescomponibilidad puede extenderse de modo natural al espacio de todas las matrices n x n ; en efecto, dígase que una matriz tal, A, es 'indescomponible' si no hay ningún subconjunto propio y no vacío, J, de N_n tal que $\forall j \varepsilon J \ \forall i \varepsilon N_n \setminus J, a_{ij} = 0$.

Denótese el espacio de todas las matrices nxn por M (n,n), y el subconjunto de todas las matrices indescomponibles por Ind(n,n). Para poder hablar de abiertos en M(n,n) es preciso tener una topología en este espacio; esto, se logra proveyéndole de una norma, como sigue. Se dirá que la norma de una matriz A es el número real $|A| := \max \{a_{ij}: |(i,j) \varepsilon N_n \times N_n\}$. En seguida se genera una métrica en M(n,n) definiendo la distancia entre dos matrices cualesquiera, A y B, mediante: $d(A,B) := |A-B|$.

Si $A \ \varepsilon$ Ind(n,n), A no puede ser la matriz nula, pues de serlo ella sería obviamente descomponible (bastaría definir $J := \{1\}$, y así $\forall i > 1, a_{ij} = 0$). Luego, $|A| > 0$ y, además, para todo subconjunto propio y no vacío de N_n, J, hay un $j \ \varepsilon \ J$ y un $i \ \varepsilon \ N_n - J$ tales que $a_{ij} \neq 0$.

Defínase e mediante $e := \max |a_{ij}| : \Phi \neq J \subset N \}$. Se sigue que cualquier otra matriz A'; tal que $|A - A'| < e$, es también indescomponible, pues $\forall J \subset N_n$, no vacío y propio, el elemento $a'_{ij} \neq 0$. Así, Ind(n.n) es abierto en M(n,n).

Finalmente, si se denota por Ind_+ (n,n) el conjunto de las matrices n x n innegativas e indescomponibles, es claro que Ind_+^* (n,n) = Ind(n,n) $\cap$ M_+^* (n,n), donde M_+^* (n,n) denota el conjunto de las matrices n x n innegativas; y como ya se probó que Ind(n,n) es un abierto de M(n,n), resulta que Ind_+^* (n,n) es un abierto de M_+^* (n,n).

Es Denso

Lo que hay que probar es que en M_+^* (n,n), las matrices indescomponibles se encuentran 'por doquier'; es decir, en cualquier vecindad, W, de cualquier matriz Q, de M_+^* (n,n), sea ésta descomponible o indescomponible y, por pequeña que sea aquella vecindad, en cualquier caso habrá una matriz innegativa e indescomponible en la dicha vecindad. Pero esto es inmediato, si se tiene en cuenta que toda matriz estrictamente positiva, es decir, carente de elementos nulos o negativos, es indescomponible; pues en caso que Q sea indescomponible, resulta trivialmente cierta la afirmación, ya que la misma Q se encuentra en todas sus vecindades; y en caso que Q sea descomponible, entonces $\exists$ e > 0, $B(Q, e) \cap M_+^*(n,n) \subset W$ (aquí B(Q,e) denota a 'la bola abierta' de centro Q y de radio e). Ahora bien, basta con definir Q' como Q + E, donde E es una matriz n x n todos cuyos elementos valen e/2; puede verse fácilmente que $Q' \varepsilon B(Q, e) \cap M_+^*(n,n)$, y, en consecuencia, a la vecindad arbitraria W. Además, Q' es estrictamente positiva y, por lo tanto, indescomponible.

Lema 2

(i) El espectro de una matriz depende continuamente de ésta, es decir, que si $\sigma(A)$ es el conjunto de los valores propios de la matriz A, entonces para cualquier vecindad U de $\sigma(A)$ en el plano complejo C, hay una vecindad, V, de A en M(n,n) tal que para toda A' de V, se tiene que $\sigma(A') \subset U$. Además, (ii) si $\lambda_0 \varepsilon \sigma(A)$ y para cierto positivo e, la bola abierta de centro en λ y de radio e, $B(\lambda, e)$ contiene de $\sigma(A)$ sólo a λ_0; entonces la suma de los órdenes de multiplicidad de los valores propios de cualquier matriz A' de V, que se encuentren en B(i,e), es igual al orden de multiplicidad de λ_0. (Ver Glazman y Liubitch, 1972, pp.121-122).

Observación

En ciertos casos, la matriz de Perron-Frobenius puede, por así decir, 'desaparecer súbitamente' a partir de alguna matriz innegativa. Por ejemplo, si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\sigma(A) = \{1\}$ y 1 es un valor propio de multiplicidad igual a 2, que resulta ser $\lambda(A)$; pero, para cualquier ε positivo, la matriz $\begin{Bmatrix} 1 & -\varepsilon^2 \\ 1 & 1 \end{Bmatrix}$ que dista de A sólo en ε, ya no tiene raíz de Perron-Frobenius, pues $\delta(A) = \{1 + i\varepsilon, 1 - i\varepsilon\}$, y, como se ve, no hay ningún valor propio real. Nótese, sin embargo, que esto no contradice en modo alguno al lema 2, sino que se ajusta a él. El que algo como esto no pueda ocurrir con matrices innegativas e indescomponibles es consecuencia del lema siguiente.

Lema 3

Hay una función cuyo dominio es el conjunto de las matrices innegativas e indescomponibles, que a cada matriz tal le asigna su raíz de Perron-Frobenius, y esta función es diferenciable.

Demostración

Primero, hay que notar que para cualquier matriz innegativa e indescomponible, A, existe su raíz de Perron-Frobenius, $\tau(A)$, según el teorema PF, y es de multiplicidad 1. Luego, por la segunda parte del lema 2, toda matriz bastante cercana a A tiene también un valor propio de multiplicidad 1 arbitrariamente cerca de $\tau(A)$; más precisamente, si e> 0 es tal que $B(\tau(A),e) \cap \sigma(a) = \{\tau(A)\}$, entonces hay un $\delta > 0$ tal que $\forall A \varepsilon M(n,n)$, $(|A' - A| < \delta \rightarrow (\exists \alpha' \varepsilon \sigma(A'), B(\tau(A),e) \cap \sigma(A') = \{\alpha'\}) \wedge$ multiplicidad $(\alpha') = 1)$. Ahora bien, α' podría no ser $\lambda(A')$, salvo que A' también fuese innegativa e indescomponible, en cuyo caso sí se tendría que $\alpha' = \lambda(A')$. Por el lema 1, se tiene que si A' está en la vecindad $B(A,\delta) \cap Ind_+(n,n)$ de A en Ind_+^* (n.n), entonces A' tiene raíz de Perron-Frobenius, $\tau(A')$, en $B(\tau(A),e)$. Así se demuestra que hay una función τ: Ind+ (n,n) $\rightarrow$R, que a cada matriz innegativa e indescomponible asocia su raíz de Perron-Frobenius, y que dicha función es continua.

En segundo lugar, hay que establecer la diferenciabilidad de la función τ. Para esto, sea $A \varepsilon \overline{Ind}_+^*(n,n)$; entonces, si los elementos de A se denotan por a_{ij}, ha de tenerse que τ (A) es solución de la ecuación $0 = \det(A - x\, I_n)$, es decir, $0 = \det(A - \tau(A)\, I_n)$. Como es fácil de verificar, la función $F: R^{nn} \times R \to R$, que $(A, x) \to \det(A - x\, I_n)$ es diferenciable, pues es polinomial. Luego, si $A \in \overline{\text{Ind}}_+(n,n)$, se cumple que $F(A, \tau(A)) = 0$. Ahora, por el teorema de la función implícita[10], hay vecindades respectivas de A y de $\tau(A)$, U y V, y hay una función diferenciable $\Psi: U \to V$ tal que $\forall A'$ de U, $F(A', \Psi(A')) = 0$.

Esto muestra que el número real positivo $\Psi(A')$ es un valor propio de A' si $V \subseteq R_+$ cosa siempre posible. Finalmente, basta notar que si A' es innegativa e indescomponible, por lo dicho antes, $\Psi(A')$ tiene que ser $\tau(A')$, es decir, $\Psi: U\ \overline{\text{Ind}}^*_+(n,n) = \tau \mid_U$, y de la diferenciabilidad de Ψ se sigue la de τ.

Teorema

Para matrices cuadradas innegativas e indescomponibles, la raíz de Perron-Frobenius está dada por una función diferenciable de los coeficientes de la matriz.

La demostración se sigue del lema 3.

Demostración del Lema 4.1

1° Obviamente, la HPGP equivale a que

$$\exists\, \alpha \in R,\ S = \alpha \Pi, \tag{1}$$

donde S denota al vector fila de componentes $S_1, \ldots, S_M$.

Ahora bien, llamando M a la matriz mxm: $\begin{bmatrix} A_I & A_{II} \\ BL_I & BL_{II} \end{bmatrix}$, (1)

$$\exists\, \alpha \in R,\ (\hat{\Lambda} - \hat{\Lambda} M) - \alpha\,(p - pM) = 0, \tag{2}$$

donde p denota al vector fila de precios de producción, y Λ al de valores laborales.

Pero si con I_m se denota a la matriz identidad m x m, entonces (2) equivale a

$$\exists\, \alpha \in R,\ (\Lambda - \alpha P)(I_m - M) = 0. \tag{3}$$

Pero, como se demuestra en Morishima (1973), pp.53, 54 y 75, el que haya tasa positiva de explotación en la economía y que A_I sea productiva, garantizan que $\det(I_m - M) \neq 0$. En consecuencia, (3) equivale a

$$\exists\, \alpha,\ \Lambda = \alpha\, p, \tag{4}$$

es decir, que los valores laborales y los precios de producción son proporcionales si, y sólo si, lo son las ganancias unitarias y las plusvalías unitarias, siendo la constante de proporcionalidad la misma.

2° HPGP $\to$ HUCO

Si las tasas de ganancia sectorial se denotan por $\pi_1, \ldots$ y π_m entonces $\pi_i = \dfrac{\Pi}{C_i^P + V_i^P} = \dfrac{S_i}{C_i + V_i}$, pues de lo visto en la primera parte de esta demostración y de las definiciones se sigue que $C_i + V_i = \alpha\left(C_i^P + V_i^P\right)$

Pero $S_i = e\, V_i$, siendo e la tasa de explotación, de donde resulta que $\pi_i = \dfrac{eV_i}{C_i + V_i}$.

Como se asume que las tasas de ganancia sectoriales son iguales entre sí, se sigue que $\dfrac{C_1}{V_1} \ldots = \dfrac{C_m}{V_m} = \dfrac{e}{\pi} - 1$, que es HUCO.

3° HUCO $\to$ PGP

Sean los $\dfrac{C_1}{V_1} = \ldots \dfrac{C_m}{V_m} = g$, entonces, como $S_i = e\, V_i$, se obtiene, reemplazando, que los $\dfrac{S_1}{C_1 + V_1} = \ldots = \dfrac{S_m}{C_m + V_m}$ son iguales entre sí. Llámese π a estas fracciones. De $S_i = \lambda_i - (C_i + V_i)$ se deduce que

$$\lambda_i = (1 + \pi)(C_i + V_i) \tag{5}$$

Pero como $\Lambda = \alpha P$, $C = \alpha C^P$ y $\alpha V = V^P$, esto da $(1+\pi)(C^P + V^P) = p$.

Esto demuestra que el π que se acaba de definir es la tasa de ganancia. Ahora, (5) da $S = \pi(C+V)$, y la igualdad anterior da $\Pi_i = \pi(C+V)$, de donde, como $C_i + V_i = \alpha(C_i^p + V_i^p)$, resulta que $S = \alpha\pi$.

Demostración del Lema 4.2

1° La HPGP

Como se ha visto en la segunda parte de la demostración del lema 5.1, lleva a que $\pi = \frac{S_i}{C_i+V_i}$; de esto se sigue que $\pi(C + V) = S$. Como HPGP implica HUCO, se obtiene que HUCO $\rightarrow \pi(C + V) = S$.

Como se ha visto en la tercera parte de la demostración del lema anterior, la HUCO lleva a la igualdad (5), de la que, a su vez, se sigue que $\pi(C + V) = S$.

Demostración del Teorema 4.3

Por el lema 4.2, se sabe que la hipótesis de la uniformidad de las composiciones orgánicas del capital equivale a la ecuación vectorial $\pi(C + V) = S$, cuya expresión en componentes es:

$$\pi(C_i + V_i) = S_i,\ \forall i \in N_n \qquad (6)$$

Ahora bien, como $C_i = \Lambda_I\ A_{.i}$, $V_i = (\Lambda_{II}\ B)\ l_i$ y $S_i = e\ V_i$, resulta que el sistema (6) equivale al:

$$\pi\,\Lambda\,M = e(\Lambda_{II}\,B)L. \qquad (7)$$

Por la definición de e, resulta que el sistema (7) equivale al:

$$\pi\,\Lambda\,M + \Lambda\,N - L = 0, \qquad (8)$$

donde la matriz N se define por: $N := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BL_I & BL_{II} \end{bmatrix}$

Dado que las condiciones determinantes de los valores laborales son: $\Lambda_I = \Lambda_I\ A_I + \Lambda_I$ y $\Lambda_{II} = \Lambda_I\ A_{II} + L_{II}$, resulta que, debido a la asunción acerca de que A_I sea productiva e indescomponible, $\Lambda_I = L_I\ (I_n - A_I)^{-1}$ y $\Lambda_{II} = L_I\ (I_n - A_I)^{-1}\ A_{II} + L_{II}$, garantizándose la existencia y positividad de la matriz $(I_n - A_I)^{-1}$. Con estas expresiones se puede escribir el vector fila de los valores laborales como

$$\Lambda = [L_I(I_n{-}A_I)^{-1}\ L_I(I_n{-}A_I)^{-1}\ A_{II} + L_{II}\ ] \qquad (9)$$

Ahora puede verse que en el sistema (8), el último término del miembro de la izquierda es dado por una aplicación diferenciable de E_{mx} a R^m, pues sólo se trata de la proyección de $R^{mn}\ xR^m\ xR^{m-n}$ a R^m; que en el miembro de la izquierda, el vector Λ es dado por otra aplicación diferenciable de E_{mx} a R^m (como lo muestra (9)), y las matrices M y N son dadas por otras aplicaciones diferenciables de E_{mx} a R^{mn}, como se desprende de sus definiciones.

Finalmente, de las ecuaciones determinantes de los precios de producción y de la tasa de ganancia:

$p_I = (1+\pi)(p_I\ A_I + wL_I\ )$, $p_{II} = (1+\pi)(p_I\ A_{II} + wL_{II})$ y $w = p_{II}B$, resulta que estas tres equivalen a:

$$p = (1+\pi)pM \qquad (10)$$

que muestra que la raíz de Perron-Frobenius de M, τ_M, es igual a $\frac{1}{1+\pi}$. De esto se concluye que π es una expresión diferenciable de τ_M para valores positivos de ésta.

Como en el apéndice se demuestra que τ_M es una función diferenciable de los coeficientes de M, se sigue que π es dada por una función diferenciable de E_{mx} a R.

En conclusión, el sistema (8) consiste en una ecuación de la forma $g(x) = 0$, donde g es una aplicación diferenciable de E_{mx} a R^m, en donde la condición del rango igual a m está garantizada por la independencia de los m sectores industriales, cosa que se da genéricamente en E_{mx}, como es fácil probar. De todo lo anterior, se concluye que el subconjunto de E_{mx} que satisface a la hipótesis de uniformidad de las composiciones orgánicas es una subvariedad diferenciable de codimensión m en $R^{mn+2m-n}$, es decir, no es tal hipótesis genérica y su grado de excepcionalidad es m[11].

Demostración del Teorema 5.1

La demostración, a partir de la (HDLI), es muy similar a la del Teorema 4.3, y sólo hace falta notar que también ella es de la forma $\tilde{g}(x) = 0$, donde $\tilde{g}$ es una aplicación diferenciable de E_{mx} a R^m que cumple con las hipótesis del Teorema 3.1, por lo cual el conjunto de sus soluciones es, igualmente, una subvariedad diferenciable de $R^{mn+2m-n}$ de codimensión m. Para ello basta notar que si $\tilde{g}$ era la aplicación considerada en la demostración del teorema 5.3, entonces la $\tilde{g}$ actual no es sino $(\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_m)$, donde $\tilde{g}_{i}(x) := \sum_{j=1}^{m} g_j(x)\, m_{ji}(x)$, siendo $m_{ji}(x)$ el elemento de fila j y de columna i de la Matriz M, que, como ya se ha visto, consiste en funciones diferenciables M_{ji}. Así se comprueba la diferenciabilidad de la aplicación $\tilde{g}$.

Notas

(1) Esto último es, más bien, el objetivo de las aplicaciones científicas de la moderna teoría de catástrofes (Ver Thom, 1972).

(2). $N_n := \{1, \ldots, n\}$.

(3) Un subconjunto del espacio es 'denso' cuando en todo abierto del espacio hay, al menos, un punto de dicho subconjunto.

(4) Un conjunto es 'innumerable' cuando puede establecerse una biyección entre él y el conjunto de los números naturales.

(5) Se dice que una aplicación de R^k a R^m es de clase C^h, si todas las derivadas parciales, hasta el orden h, de sus funciones componentes son continuas. Para éste y otros conceptos referentes a las subvariedades diferenciables de los espacios euclídeos, ver Spivak, 1965.

(6) Para una representación más detallada del modelo multisectorial de una economía marxiana, ver Morishima, 1972, pp.1-69. Además, se asume que mn.

(7) Para las definiciones de estos términos, ver G. Cobián, 1983.

(8) $A_{.i}$ denota la i-ésima columna de la matriz A, y $A_{i.}$ denota a su i-ésima fila; $\Lambda := [\Lambda_I \mid \Lambda_{II}]$ es el vector de valores laborales.

(9) Ver R.G. Cobián, 1983, p.150.

(10) Ver Benavie, 1973, p.28.

(11) Cabe una observación de carácter técnico exigida por el hecho de que E_{mx} sea la intersección de un abierto U con $R^{mn} \times R^m_+ \times R_+^{m-n}$, que no es abierto. En realidad habría que considerar que la aplicación g de la que se habla al final de la demostración es fácilmente extendible a otra aplicación G definida sobre algún abierto que contenga a E_{mx}, para lo cual vale todo lo dicho.

Referencias

Apostol, T., M. *Análisis Matemático*. Segunda edición, Barcelona: Reverté, 1986.

Benavie, A. *Técnicas Matemáticas del Análisis Económico*. Madrid: Prentice-Hall, 1973.

García-Cobián, R. *Una Versión Crítica de la Teoría de Producción Disjunta de Sraffa*. Lima: Departamento de Economía, Pontificia Universidad Católica del Perú. Vol. VI, Nos. 11-12, junio-diciembre 1983.

Glazman, I. y Y. Liubitch. *Analyse Linéaire dans les Espaces de Dimensions Finies*. Moscú: MIR, 1973.

Morishima, M. *Marx's Economics*. Inglaterra: Cambridge U.P., Cambridge, 1973.

Nikaido, H. *Métodos Matemáticos del Análisis Económico Moderno*. Barcelona: Vicens-Vives, 1978.

Spivak, M. *Calculus on manifolds*. New York: Benjamin, 1965.

Thom, R. *Stabilité Structurelle et Morphogénese*. Massachussetts: Benjamin, Reading, 1972.